3 Geometría afín

3.1 Variedad o subespacio afín

Se llama **variedad afín** o **subespacio afín** de un espacio vectorial V a cualquier conjunto de la forma

$$\mathbf{u}+S=\{\mathbf{u}+\mathbf{v}\,:\,\mathbf{v}\in S\}\subset V$$

con $\mathbf{u}\in V$ y S un subespacio vectorial de V, que se llama **subespacio de direcciones**.

Si $S=L\left(\{\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}\right)$, entonces

$$\mathbf{u}+S=\left\{\mathbf{u}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{v}_i\,:\,\alpha_i\in\mathbb{K},\,1\leq i\leq m\right\}\subset V$$

Se llama **dimensión del subespacio afín** $\mathbf{u}+S$ a la dimensión del subespacio vectorial asociado S:

$$\dim(\mathbf{u}+S)=\dim S$$

3.2 Observaciones

1. $\mathbf{u}\in\mathbf{u}+S$
2. $\mathbf{0}\in\mathbf{u}+S\Longleftrightarrow\mathbf{u}\in S\Longleftrightarrow\mathbf{u}+S=S$
3. Si $V=\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbf{u}+S\quad\text{es}\;\begin{cases}\text{un } \textbf{punto} & \text{, si } \dim S=0\\ \text{una } \textbf{recta} & \text{, si } \dim S=1\\ \text{un } \textbf{plano} & \text{, si } 2\leq\dim S<n-1\\ \text{un } \textbf{hiperplano} & \text{, si } \dim S=n-1\\ \text{el } \textbf{espacio } V=\mathbb{R}^n & \text{, si } \dim S=n\end{cases}$$

3.3 Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^3$, la recta que pasa por $P(1,-1,0)$ con vector de dirección $\mathbf{v}=(1,1,1)$ es:

$$\overrightarrow{OP}+L\left(\{\mathbf{v}\}\right)=\{(x,y,z)=(1,-1,0)+\alpha(1,1,1)\,:\,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\left\{\begin{array}{l}x=1+\alpha\\ y=-1+\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right.\;;\,\alpha\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ x-z=1\end{array}\right.$$

2. En $\mathbb{R}^3$, la recta que pasa por $P(0,1,1)$ y $Q(1,0,1)$ es:

$$\overrightarrow{OP}+L\left(\left\{\overrightarrow{PQ}\right\}\right)=\{(x,y,z)=(0,1,1)+\alpha(1,-1,0)\,:\,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\alpha\\ y=1-\alpha\\ z=1\end{array}\right.\;;\,\alpha\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x+y=1\\ z=1\end{array}\right.$$

3. En $\mathbb{R}^3$, el plano que pasa por $P(1,0,0)$ con vectores de dirección $\mathbf{u}=(1,1,0)$ y $\mathbf{v}=(0,0,1)$ es:
$$\overrightarrow{OP}+L\left(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\right)=\{(x,y,z)=(1,0,0)+\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)\;:\;\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$
cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:
$$\left\{\begin{array}{l} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right. \;;\;\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad x-y=1$$

4. En $\mathbb{R}^4$, el hiperplano que pasa por $P_1(1,0,0,0)$, $P_2(0,1,0,0)$, $P_3(0,0,1,0)$ y $P_4(0,0,0,1)$ es:
$$\overrightarrow{OP_1}+L\left(\left\{\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right\}\right)=$$
$$=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,0,0)+\alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(-1,0,0,1)\;:\;\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$
cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:
$$\left\{\begin{array}{l} x_1=1-\alpha-\beta-\gamma \\ x_2=\alpha \\ x_3=\beta \\ x_4=\gamma \end{array}\right. \;;\;\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

3.4 Igualdad de variedades afines

Sean V un espacio vectorial, S y T subespacios vectoriales de V, y $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$. Entonces
$$\mathbf{u}+S=\mathbf{v}+T \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} S=T \\ \mathbf{u}-\mathbf{v}\in S\cap T \end{array}\right.$$

Demostración:
($\Leftarrow$) Puesto que $S=T$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}\in T$:
$$\mathbf{u}+S=(\mathbf{u}-\mathbf{v})+\mathbf{v}+T=\mathbf{v}+T$$

($\Rightarrow$)
$$\mathbf{u}+S=\mathbf{v}+T\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}\in\mathbf{v}+T\Longrightarrow\mathbf{u}-\mathbf{v}\in T \\ \mathbf{v}\in\mathbf{u}+S\Longrightarrow\mathbf{v}-\mathbf{u}\in S\Longrightarrow\mathbf{u}-\mathbf{v}\in S \end{array}\right.\Longrightarrow\mathbf{u}-\mathbf{v}\in S\cap T$$

y además
$$S=-\mathbf{u}+\mathbf{u}+S=-\mathbf{u}+\mathbf{v}+T=-(\mathbf{u}-\mathbf{v})+T=T$$

3.5 Ejemplo

Para estudiar la igualdad de las variedades afines
$$A\equiv\left\{\begin{array}{l} x_1=1+\alpha \\ x_2=-\alpha+\beta \\ x_3=\beta \\ x_4=-1+\beta \end{array}\right. \qquad B\equiv\left\{\begin{array}{l} x_1=2+\alpha+\beta+\gamma \\ x_2=-\alpha+\gamma \\ x_3=1+\beta+2\gamma \\ x_4=\beta+2\gamma \end{array}\right. \qquad C\equiv\left\{\begin{array}{l} x_1=-1+\alpha+\beta \\ x_2=-\alpha-2\beta \\ x_3=-\beta \\ x_4=-1-\beta \end{array}\right.$$

se determina un vector y un subespacio de direcciones de cada una de ellas:

$$A = \mathbf{u}_A + S_A \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_A = (1,0,0,-1) \\ S_A = L\left(\{(1,-1,0,0),\ (0,1,1,1)\}\right) \end{cases}$$

$$B = \mathbf{u}_B + S_B \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_B = (2,0,1,0) \\ S_B = L\left(\{(1,-1,0,0),\ (1,0,1,1),\ (1,1,2,2)\}\right) \end{cases}$$

$$C = \mathbf{u}_C + S_C \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_C = (-1,0,0,-1) \\ S_C = L\left(\{(1,-1,0,0),\ (1,-2,-1,-1)\}\right) \end{cases}$$

En primer lugar se comprueba, hallando la matriz escalonada de la matriz asociada a sus vectores de dirección, si coinciden los subespacios vectoriales asociados:

$$S_A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_B \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_C \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $S = S_A = S_B = S_C = L\left(\{\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,1,1)\}\right)$ y las tres variedades afines verifican la primera condición. Para verificar la segunda se comprueba, mediante operaciones elementales, si las diferencias entre cada dos vectores de los que definen las variedades pertenecen al subespacio vectorial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_C \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

de donde $\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B \in S$, $\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_C \notin S$ y $\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_C \notin S$. Luego $A = B \neq C$.

3.6 Posición relativa de variedades afines

Sean $\mathbf{u} + S$ y $\mathbf{v} + T$ dos variedades afines en un espacio vectorial V. Entonces, si

- $\mathbf{u} + S \cap \mathbf{v} + T = \begin{cases} \mathbf{u} + S, \text{ se dice que } \mathbf{u} + S \text{ está } \textbf{contenida} \text{ en } \mathbf{v} + T. \\ \mathbf{v} + T, \text{ se dice que } \mathbf{v} + T \text{ está } \textbf{contenida} \text{ en } \mathbf{u} + S. \end{cases}$
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) = \emptyset$, y $S \subset T$ o $T \subset S$, se dice que $\mathbf{u} + S$ y $\mathbf{v} + T$ son **paralelas**.
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) = \emptyset$, y $S \not\subset T$ y $T \not\subset S$, se dice que $\mathbf{u} + S$ y $\mathbf{v} + T$ se **cruzan**.
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) \neq \begin{cases} \emptyset \\ \mathbf{u} + S \\ \mathbf{v} + T \end{cases}$, se dice que $\mathbf{u} + S$ y $\mathbf{v} + T$ se **cortan**.

3.7 Posiciones relativas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Sean $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$ y $s \equiv \mathbf{u}_s + L(\{\mathbf{v}_s\})$ dos rectas del plano $\mathbb{R}^2$. Entonces si

$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v_s})$	$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v_s}, \mathbf{u_r} - \mathbf{u_s})$	**Posición relativa de r y s**
1	1	iguales
1	2	paralelas
2	2	se cortan en un punto

2. Sean $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$ y $s \equiv \mathbf{u}_s + L(\{\mathbf{v}_s\})$ dos rectas del espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces si

$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v_s})$	$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v_s}, \mathbf{u_r} - \mathbf{u_s})$	**Posición relativa de r y s**
1	1	iguales
1	2	paralelas
2	2	se cortan en un punto
2	3	se cruzan

3. Sean $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$ y $\pi \equiv \mathbf{u}_\pi + L(\{\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi\})$ una recta y un plano del espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces si

$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi)$	$\mathrm{rg}(\mathbf{v_r}, \mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{u_r} - \mathbf{u}_\pi)$	**Posición relativa de r y π**
2	2	la recta está contenida en el plano
2	3	paralelos
3	3	se cortan en un punto

4. Sean $\pi \equiv \mathbf{u}_\pi + L(\{\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi\})$ y $\sigma \equiv \mathbf{u}_\sigma + L(\{\mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma\})$ dos planos del espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces si

$\mathrm{rg}(\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma)$	$\mathrm{rg}(\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma, \mathbf{u}_\pi - \mathbf{u}_\sigma)$	**Posición relativa de π y σ**
2	2	iguales
2	3	paralelos
3	3	se cortan en una recta

3.8 Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^2$, las rectas

$$r_1 \equiv x - y = -1 \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = \alpha + 3 \end{cases} \qquad r_3 \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 3\alpha - 2 \end{cases}$$

verifican: $r_1 \parallel r_2$, $r_1 \cap r_3 = \{(0,1)\}$, y $r_2 \cap r_3 = \{(3/2, 11/2)\}$.

2. En $\mathbb{R}^3$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ corta al plano $\pi_1 \equiv y - z = 1$ en un punto y está contenida en el plano $\pi_2 \equiv y + z = 1$. Los planos se cortan en una recta. Más concretamente:

$$r \cap \pi_1 = \{(0,1,0)\} \qquad \text{y} \qquad \pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

3. En $\mathbb{R}^3$, las rectas

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{array} \right. \equiv (0,0,1) + L\left(\{(1,1,-1)\}\right)$$

$$r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{r} x - 2z = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{array} \right. \equiv (1,1,0) + L\left(\{(2,0,1)\}\right)$$

$$r_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + z = 4 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{array} \right. \equiv (1,1,3) + L\left(\{(1,1,-1)\}\right)$$

verifican: $r_1 \cap r_2 = \{(1,1,0)\}$, r_1 y r_3 son paralelas, y r_2 y r_3 se cruzan.

4. En $\mathbb{R}^4$, el hiperplano $H \equiv x_1 - x_4 = -1$ y el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{array} \right.$ se cortan en la recta

$$H \cap \pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 + \alpha \\ x_2 = -3 + 2\alpha \\ x_3 = 3\alpha \\ x_4 = \alpha \end{array} \right. \equiv (-1,-3,0,0) + L\left(\{(1,2,3,1)\}\right)$$

5. En $\mathbb{R}^4$, los planos $\pi_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{array} \right.$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right.$ se cruzan, pues su intersección es vacía y ninguno de los subespacios de direcciones, $L\left(\{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}\right)$ de π_1 y $L\left(\{(1,0,0,0),(0,2,-1,-1)\}\right)$ de π_2, está contenido en el otro.

6. En $\mathbb{R}^4$, los planos $\pi_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{array} \right.$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right.$ son paralelos, pues su intersección es vacía y sus subespacios de direcciones coinciden.